

# Vorkurs Mathematik für Chemiker – WS2020/21

## Übungsblatt 1

Dr. Dirk Bender & Dr. Alexander Schubert,  
Institut für Physikalische Chemie, Friedrich-Schiller-Universität Jena

### 1 Grundlagen der Logik

1.1 Man überführe die folgende Aussage  $A$  in einen aussagenlogischen Term:

“Sonntags besuchen wir unsere Freunde und, sofern es nicht gerade regnet, machen wir eine Wanderung oder eine Fahrradtour.”

*Hinweis:* Verwenden Sie die logischen Operatoren  $\wedge$  “Und”,  $\vee$  “Oder” und  $\neg$  “Nicht” sowie  $\implies$  “Daraus folgt”.

1.2 Oft sind Sätze der Umgangssprache unpräzise oder mehrdeutig, was man meist erst bei der logischen Analyse entdeckt. Man erläutere dies anhand der folgenden Aussage  $A$ :

$A$ : “Unsere Zimmer sind mit Fernseher und Telefon oder Internetanschluß ausgestattet.”

1.3 Gegeben seien die beiden boolschen Aussagen:

$$t_1(x, y) := ((x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)) \vee (\neg x \vee y) \quad \text{und} \quad t_2(x, y, z) := \neg \left( ((x \vee y) \vee z) \wedge (\neg x \vee z) \right).$$

a) Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle für die Aussagen  $t_1$  und  $t_2$ .

b) Vereinfachen Sie die Ausdrücke  $t_1$  und  $t_2$  anschließend mit Hilfe des *redundanten Axiomensystems von Peano*.

*Hinweis: Redundantes Axiomensystem von Peano:*

Kommutativgesetze	(1) $a \wedge b = b \wedge a$	(1') $a \vee b = b \vee a$
Assoziativgesetze	(2) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	(2') $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
Idempotenzgesetze	(3) $a \wedge a = a$	(3') $a \vee a = a$
Distributivgesetze	(4) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	(4') $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Neutralitätsgesetze	(5) $a \wedge 1 = a$	(5') $a \vee 0 = a$
Extremalgesetze	(6) $a \wedge 0 = 0$	(6') $a \vee 1 = 1$
Doppelnegationsges. (Involution)	(7) $\neg(\neg a) = a$	
De Morgansche Gesetze	(8) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	(8') $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
Komplementärgesetze	(9) $a \wedge \neg a = 0$	(9') $a \vee \neg a = 1$
Dualitätsgesetze	(10) $\neg 0 = 1$	(10') $\neg 1 = 0$
Absorptionsgesetze	(11) $a \vee (a \wedge b) = a$	(11') $a \wedge (a \vee b) = a$

## 2 Mengen

**2.1** Sei  $M$  eine Menge. Geben Sie umgangssprachliche Formulierungen an, die inhaltlich mit

a)  $\exists x \in M : E.$

b)  $\forall x \in M : A.$

übereinstimmen.

**2.2** Erläutern Sie anhand eines Beispiels, daß es beim Verwenden der Symbole  $\forall$  und  $\exists$  auf die Reihenfolge dieser Symbole in einer Formel ankommt, d.h., in dem zu findenden Beispiel sind  $\forall x \exists y : A$  und  $\exists y \forall x : A$  inhaltlich verschiedene Aussagen über die Elemente  $x, y \in M$ .

**2.3** Für die Menge aller Dreiecke  $D$  seien folgende Teilmengen definiert:

$$A := \{x \in D \mid x \text{ ist gleichseitiges Dreieck}\}$$

(sprich: "A ist die Menge aller Elemente  $x$  aus der Menge  $D$ , für die gilt ...")

$$B := \{x \in D \mid x \text{ ist gleichschenkliges Dreieck}\}$$

$$C := \{x \in D \mid x \text{ ist rechtwinkliges Dreieck}\}$$

Man stelle die Beziehungen zwischen diesen Mengen durch ein Venn-Diagramm dar.

*Hinweis:* Verwenden Sie zum Notieren relevanter Beziehungen die Operatoren:

$\subseteq$  "Teilmenge",  $\subset$  "echte Teilmenge",  $\cap$  "Schnittmenge" (und),  $\cup$  "Vereinigung" (oder).

**2.4** Ein Meinungsforscher sendet seinem Chef das Ergebnis seiner Umfrage über die Beliebtheit von Bier und Wein:

Anzahl der Befragten: 100

Anzahl derer, die Bier trinken: 75

Anzahl derer, die Wein trinken: 68

Anzahl derer, die beides trinken: 42

Begründen Sie mittels Mengen (verwenden Sie ggf. ein Venn-Diagramm), warum der Chef über die Studienergebnisse wenig erfreut ist.

**2.5** Gegeben seien die Mengen

$$A := \{1, 2\}, \quad B := \{1, 2, 3, 4\}, \quad C := \{2\}, \quad D := \{1, A, B, C\}.$$

Welche der folgenden Beziehungen sind richtig?

(a)  $4 \in B$       (b)  $A \subset B$       (c)  $A \in D$       (d)  $A \subset D$       (e)  $2 \in D$

(f)  $1 \in D$       (g)  $\emptyset \in C$       (h)  $\emptyset \subset D$       (i)  $C \in B$       (j)  $1 \subset D$

(k)  $\{1, B\} \subseteq D$       (l)  $A \cup C \subset B$       (m)  $C \subset D$       (n)  $C \in D$       (o)  $\{C\} \subset D$

### 3 Zahlenbereiche $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$

**3.1** Zeigen Sie: Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl ergibt bei Division durch 4 den Rest 1.

**3.2** Welche Formeln haben die Verbindungen, die aus Magnesium-Ionen,  $\text{Mg}^{2+}$ , mit folgenden Ionen gebildet werden: **a)** Chlorid,  $\text{Cl}^-$ ; **b)** Sulfat,  $\text{SO}_4^{2-}$ ; **c)** Nitrid,  $\text{N}^{3-}$ ?

**3.3** Welchen Wert erhält die Summe  $S = |a^2 - b^2 + 5ab| + |b - a| - 1$  für

a)  $a = 2, b = -1,$

b)  $a = 0, b = 4,$

c)  $a = b = 1$  ?

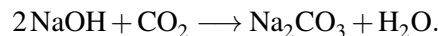
**3.4** Worin besteht der Fehler in folgendem Schluß, dass jede Zahl  $x$  ihrem Doppelten,  $2x$ , gleicht:

$$\begin{aligned}x^2 - x^2 &= x^2 - x^2 \\x(x - x) &= (x + x) \cdot (x - x) \\x &= 2x.\end{aligned}$$

**3.5** Ein Gefäß ist zu  $\frac{2}{5}$  gefüllt. Es enthält  $\frac{3}{8}$  Liter einer Lösung. Wie viele Liter fasst das ganze Gefäß?

**3.6** Bestimmen Sie, wie viel des folgenden Stoffes in Wasser gelöst werden muss, um einen halben Liter einer 0,3 M Lösung herzustellen: **a)**  $\text{NaCl}$ ,  $M_{\text{NaCl}} = 58,44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ , **b)**  $\text{NH}_4\text{Cl}$ ,  $M_{\text{NH}_4\text{Cl}} = 53,49 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ .

**3.7** Berechnen Sie, wie viel mg Natriumcarbonat bei der Umsetzung von 4 g Natriumhydroxid mit Kohlenstoffdioxid entstehen, die nach der folgenden Reaktion abläuft:



Die molaren Massen betragen  $M_{\text{NaOH}} = 40 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  und  $M_{\text{Na}_2\text{CO}_3} = 106 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ .

**3.8** Berechnen Sie das Massenverhältnis (in Prozent) von Kohlenstoff und Wasserstoff in Glucose ( $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ ). Die molaren Massen betragen  $M_{\text{H}} = 1,01 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ ,  $M_{\text{C}} = 12,01 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  und  $M_{\text{O}} = 16,00 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ .

**3.9** Die Analyse einer unbekanntes Substanz ergab einen Anteil von 45,0% Kalium, 18,5% Schwefel und 36,5% Sauerstoff (Werte in Masseprozent). Wie lautet die Summenformel der unbekanntes Substanz?

Die molaren Massen betragen  $M_{\text{O}} = 16,00 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ ,  $M_{\text{S}} = 32,07 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  und  $M_{\text{K}} = 39,10 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ .

**3.10** Sei  $a$  eine irrationale Zahl. Sind die folgenden Zahlen rational oder irrational:

- a)  $\sqrt{2}$ ,    b)  $\sqrt{3}$ ,    c)  $\sqrt{4}$   
d)  $\sqrt{12}$ ,    e)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ ,    f)  $\sqrt{3^2 + 4^2}$   
g)  $\pi$ ,    h)  $\ln 2$ ,    i)  $e$   
j)  $\frac{3}{7}$ ,    k)  $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ ,    l)  $\frac{\pi}{7}$   
m)  $-24 + a$ ,    n)  $\frac{64}{a}$