Vorkurs Mathematik für Chemiker – WS2020/21
Übungsblatt 5

Dr. Dirk Bender & Dr. Alexander Schubert,
Institut für Physikalische Chemie, Friedrich-Schiller-Universität Jena

11 Vektorrechnung

11.1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch:

(a) $\vec{a} - \vec{c}$ (b) $\vec{c} - \vec{a}$ (c) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

11.2 Welche Eigenschaften haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn folgende Beziehungen gelten:

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ und $a + b = c$

(b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$

(c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ und $a^2 + b^2 = c^2$

(d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ mit $a, b \neq 0$.

11.3 Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

(a) die Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$;

(b) das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

(c) den Winkel $\angle(\vec{a}, \vec{b})$;

(d) die Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

11.4 Gegeben seien die Ortsvektoren $\vec{r}_1(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2(t_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie das Zeitinterfall $\Delta t = t_2 - t_1 = 0{,}4$. Bestimmen Sie den Differenzvektor $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)$ und anschließend durch sakare Multiplikation den Term $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Welche Bedeutung hat dieser Term?

11.5 Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in Komponenten parallel und normal zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

11.6 Welchen Wert hat der Ausdruck $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2$?

12 Komplexe Zahlen

12.1 Berechnen Sie $z+w$, $z \cdot w$, $|z|$, und $\frac{w}{z}$ für $z = 1+2\mathbb{i}$ and $w = 3-\mathbb{i}$.

12.2 Berechnen Sie $v = \mathbb{i} \cdot (2-3\mathbb{i})^2 \cdot (1+\mathbb{i})$.

12.3 Berechnen Sie die konjugiert komplexe Zahl zu $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{i}\phi}$ und geben Sie die Eulersche Darstellung an.

12.4 Es sei $z = a + \mathbb{i}b$. Bestimmen Sie $|\mathrm{e}^z|$.

12.5 Berechnen Sie $\mathrm{e}^{\mathbb{i}2\pi}$, $\mathrm{e}^{\mathbb{i}\pi}$, $\mathrm{e}^{-\mathbb{i}\pi}$, $\mathrm{e}^{\pm\mathbb{i}\pi/2}$.

12.6 Berechnen Sie mittels trigonometrischer Darstellung $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbb{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2020}$.

12.7 Berechnen Sie $z = \frac{3\mathbb{i}}{\sqrt{2}+\mathbb{i}\sqrt{2}}$.